专题三 立体几何

第1讲 空间几何体中的计算与位置关系

考向预测

1.以三视图和空间几何体为载体考查面积与体积，难度中档偏下；

2.以选择题、填空题的形式考查线线、线面、面面位置关系的判定与性质定理对命题的真假进行判断，属基础题；空间中的平行、垂直关系的证明也是高考必考内容，多出现在立体几何解答题中的第(1)问.

知识与技巧的梳理

1.空间几何体的三视图：长对正、高平齐、宽相等.

2.空间几何体的两组常用公式

(1)正柱体、正锥体、正台体的侧面积公式：

①$S_{柱侧}=ch$(c 为底面周长，h 为高)；

②$S_{锥侧}=\frac{1}{2}ch'$(c 为底面周长，h'为斜高/母线)；

③$S_{台侧}=\frac{1}{2}(c+c')h'$($c'$，$c$ 分别为上下底面的周长，h'为斜高/母线)；

④$S_{球表}=4\pi R^2$(R 为球的半径).

(2)柱体、锥体和球的体积公式：

①$V_{柱体}=Sh$(S 为底面面积，h 为高)；

②$V_{锥体}=\frac{1}{3}Sh$(S 为底面面积，h 为高)；

③$V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3$.

3.直线、平面平行的判定及其性质

(1)线面平行的判定定理：$a\not\subset\alpha$，$b\subset\alpha$，$a/\!/b\Rightarrow a/\!/\alpha$.

(2)线面平行的性质定理：$a/\!/\alpha$，$a\subset\beta$，$\alpha\cap\beta=b\Rightarrow a/\!/b$.

(3)面面平行的判定定理：$a\subset\beta$，$b\subset\beta$，$a\cap b=P$，$a/\!/\alpha$，$b/\!/\alpha\Rightarrow\alpha/\!/\beta$.

(4)面面平行的性质定理：$\alpha/\!/\beta$，$\alpha\cap\gamma=a$，$\beta\cap\gamma=b\Rightarrow a/\!/b$.

4.直线、平面垂直的判定及其性质

(1)线面垂直的判定定理：$m\subset\alpha$，$n\subset\alpha$，$m\cap n=P$，$l\perp m$，$l\perp n\Rightarrow l\perp\alpha$.

(2)线面垂直的性质定理：$a\perp\alpha$，$b\perp\alpha\Rightarrow a/\!/b$.

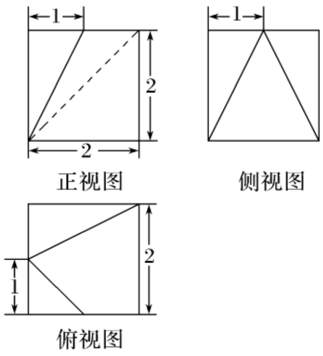
(3)面面垂直的判定定理：$a\subset\beta$，$a\perp\alpha\Rightarrow\alpha\perp\beta$.

(4)面面垂直的性质定理：$\alpha\perp\beta$，$\alpha\cap\beta=l$，$a\subset\alpha$，$a\perp l\Rightarrow a\perp\beta$.

热点题型

热点一　空间几何体的三视图与表面积、体积

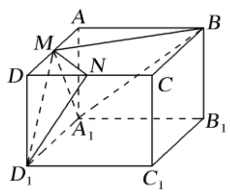
【例 1】 (2017·淄博诊断)如图为一个多面体的三视图，则该多面体的体积为(　　)



A.$\frac{20}{3}$　　B.7　　C.$\frac{22}{3}$　　D.$\frac{23}{3}$

解析　由三视图知，该几何体是棱长为 2 的正方体截去三棱锥 $D-D_1MN$ 与三棱锥 $A-MA_1B$ 后剩下的多面体，

∴该几何体的体积 $V=2^3-\frac{1}{3}\times2\times\frac{1}{2}\times1^2-\frac{1}{3}\times2\times\frac{1\times2}{2}=7$.



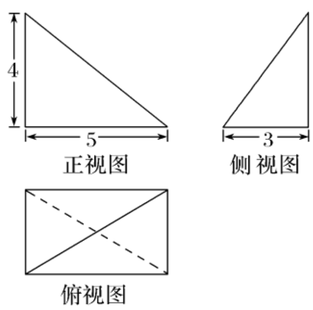
答案　B

探究提高　1.由几何体的三视图求其表面积：(1)关键是分析三视图确定几何体中各元素之间的位置关系及度量大小.(2)还原几何体的直观图，套用相应的面积公式.

2. 求三棱锥的体积：等体积转化是常用的方法，转换原则是其高易求，底面放在已知几何体的某一面上.

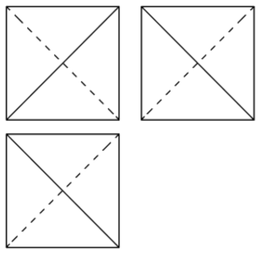
3. 求不规则几何体的体积：常用分割或补形的思想，将不规则几何体转化为规则几何体以易于求解.

【训练 1】 (1)(2017·北京卷)某三棱锥的三视图如图所示，则该三棱锥的体积为(　　)

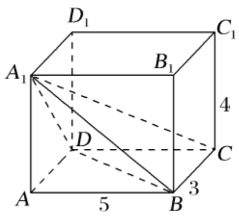


A.60　　B.30　　C.20　　D.10

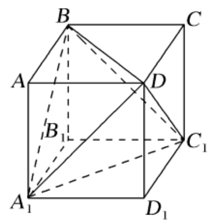
(2)(2017·枣庄模拟)如图，某三棱锥的三视图是三个边长相等的正方形及对角线，若该三棱锥的体积是$\frac{1}{3}$，则它的表面积是________.



解析　(1)由三视图知可把三棱锥放在一个长方体内部，即三棱锥 A_1-BCD，$V_{A_1-BCD}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times3\times5\times4=10$.



(2)由题设及几何体的三视图知，该几何体是一个正方体截去 4 个三棱锥后剩余的内接正三棱锥 $B-A_1C_1D$(如图所示).



设正方体的棱长为 a，则几何体的体积是 $V=a^3-4\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}a^2\cdot a=\frac{1}{3}a^3=\frac{1}{3}$，

$\therefore a=1$，$\therefore$三棱锥的棱长为$\sqrt{2}$，因此该三棱锥的表面积为 $S=4\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times(\sqrt{2})^2=2\sqrt{3}$.

答案　(1)D　(2)$2\sqrt{3}$

热点二　外接球与内切球

【例 2】 (2016·全国Ⅲ卷)在封闭的直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 内有一个体积为 V 的球.若 $AB\perp BC$，$AB=6$，$BC=8$，$AA_1=3$，则 V 的最大值是(　　)

A.4π　　B.$\frac{9\pi}{2}$　　C.6π　　D.$\frac{32\pi}{3}$

解析　由 $AB\perp BC$，$AB=6$，$BC=8$，得 $AC=10$.要使球的体积 V 最大，则球与直三棱柱的部分面相切，若球与三个侧面相切，设底面△ABC 的内切圆的半径为 r.

则$\frac{1}{2}\times6\times8=\frac{1}{2}\times(6+8+10)\ r$，所以 $r=2.2r=4>3$，不合题意.

球与三棱柱的上、下底面相切时，球的半径 R 最大.

由 $2R=3$，即 $R=\frac{3}{2}$.故球的最大体积 $V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{9}{2}\pi$.

答案　B

探究提高　1.与球有关的组合体问题，一种是内切，一种是外接.球与旋转体的组合通常是作它们的轴截面解题，

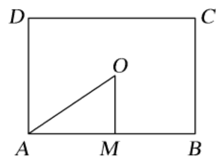
球与多面体的组合，通过多面体的一条侧棱和球心，或“切点”、“接点”作出截面图，把空间问题化归为平面问题.

2. 若球面上四点 P，A，B，C 中 PA，PB，PC 两两垂直或三棱锥的三条侧棱两两垂直，可构造长方体或正方体确定直径解决外接问题.

【训练 2】 (2017·全国Ⅲ卷)已知圆柱的高为 1，它的两个底面的圆周在直径为 2 的同一个球的球面上，则该圆柱的体积为(　　)

A.π　　　　B.$\frac{3\pi}{4}$　　　　C.$\frac{\pi}{2}$　　　　D.$\frac{\pi}{4}$

解析　如图画出圆柱的轴截面 $ABCD$，O 为球心.球半径 $R=OA=1$，球心到底面圆的距离为 $OM=\frac{1}{2}$.



$\therefore$ 底面圆半径 $r=\sqrt{OA^2-OM^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，故圆柱体积 $V=\pi\cdot r^2\cdot h=\pi\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\times 1=\frac{3\pi}{4}$.

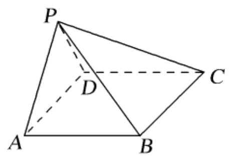
答案　B

热点三　空间平行、垂直关系的判断与证明

【例 3】(2017·全国Ⅰ卷)如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$AB\parallel CD$，且 $\angle BAP=\angle CDP=90°$.

(1)证明：平面 $PAB\perp$ 平面 PAD；

(2)若 $PA=PD=AB=DC$，$\angle APD=90°$，且四棱锥 $P-ABCD$ 的体积为$\frac{8}{3}$，求该四棱锥的侧面积.

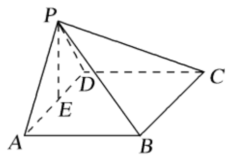


(1)**证明**　$\because \angle BAP=\angle CDP=90°$，$\therefore AB\perp PA$，$CD\perp PD$.

$\because AB\parallel CD$，$\therefore AB\perp PD$.又$\because PA\cap PD=P$，PA，$PD\subset$平面 PAD，$\therefore AB\perp$平面 PAD.

$\because AB\subset$平面 PAB，$\therefore$平面 $PAB\perp$平面 PAD.

(2)**解**　取 AD 的中点 E，连接 PE.$\because PA=PD$，$\therefore PE\perp AD$.



由(1)知，$AB\perp$平面 PAD，故 $AB\perp PE$，$AB\perp AD$，可得 $PE\perp$平面 $ABCD$.

设 $AB=x$，则由已知可得 $AD=\sqrt{2}x$，$PE=\frac{\sqrt{2}}{2}x$，

故四棱锥 $P-ABCD$ 的体积 $V_{P-ABCD}=\frac{1}{3}AB\cdot AD\cdot PE=\frac{1}{3}x^3$.

由题设得$\frac{1}{3}x^3=\frac{8}{3}$，故 $x=2$.从而 $PA=PD=AB=DC=2$，$AD=BC=2\sqrt{2}$，$PB=PC=2\sqrt{2}$，

可得四棱锥 $P-ABCD$ 的侧面积为$\frac{1}{2}PA\cdot PD+\frac{1}{2}PA\cdot AB+\frac{1}{2}PD\cdot DC+\frac{1}{2}BC^2\sin 60°\ =6+2\sqrt{3}$.

探究提高 垂直、平行关系证明中应用转化与化归思想的常见类型.

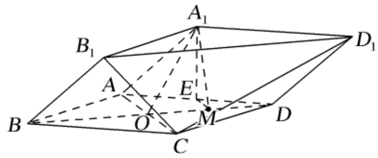
(1)证明线面、面面平行，需转化为证明线线平行.

(2)证明线面垂直，需转化为证明线线垂直.

(3)证明线线垂直，需转化为证明线面垂直.

(4)证明面面垂直，需转化为证明线面垂直，进而转化为证明线线垂直.

【训练 3】 (2017 山东卷)由四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 截去三棱锥 $C_1-B_1CD_1$ 后得到的几何体如图所示.四边形 $ABCD$ 为正方形，O 为 AC 与 BD 的交点，E 为 AD 的中点，$A_1E\perp$平面 $ABCD$.



(1)证明：A_1O∥平面 B_1CD_1；

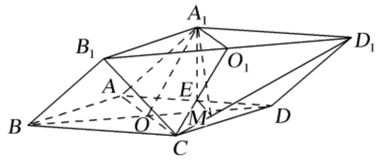
(2)设 M 是 OD 的中点，证明：平面 $A_1EM\perp$平面 B_1CD_1.

证明 (1)取 B_1D_1 的中点 O_1，连接 CO_1，A_1O_1，

由于 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是四棱柱，所以 A_1O_1∥OC，$A_1O_1=OC$，

因此四边形 A_1OCO_1 为平行四边形，所以 A_1O∥O_1C，

又 $O_1C\subset$平面 B_1CD_1，$A_1O\not\subset$平面 B_1CD_1，所以 A_1O∥平面 B_1CD_1.



(2)因为 $AC\perp BD$，E，M 分别为 AD 和 OD 的中点，所以 $EM\perp BD$，

又 $A_1E\perp$平面 $ABCD$，$BD\subset$平面 $ABCD$，所以 $A_1E\perp BD$，

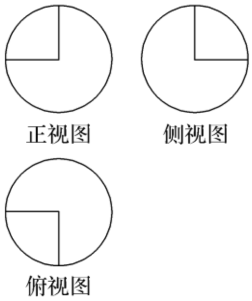
因为 B_1D_1∥BD，所以 $EM\perp B_1D_1$，$A_1E\perp B_1D_1$，又 A_1E，$EM\subset$平面 A_1EM，$A_1E\cap EM=E$，

所以 $B_1D_1\perp$平面 A_1EM，又 $B_1D_1\subset$平面 B_1CD_1，所以平面 $A_1EM\perp$平面 B_1CD_1.

限时训练 （45 分钟）

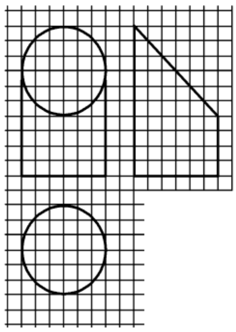
经典常规题

1.(2016 全国Ⅰ卷)如图，某几何体的三视图是三个半径相等的圆及每个圆中两条互相垂直的半径.若该几何体的体积是$\frac{28\pi}{3}$，则它的表面积是(　　)



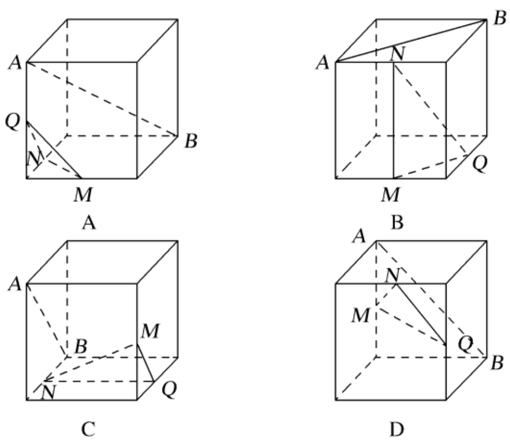
A.17π　　B.18π　　C.20π　　D.28π

2.(2017 全国Ⅱ卷)如图，网格纸上小正方形的边长为 1，粗实线画出的是某几何体的三视图，该几何体由一平面将一圆柱截去一部分后所得，则该几何体的体积为(　　)



A.90π　　B.63π　　C.42π　　D.36π

3.(2017 全国Ⅰ卷)如图，在下列四个正方体中，A，B 为正方体的两个顶点，M，N，Q 为所在棱的中点，则在这四个正方体中，直线 AB 与平面 MNQ 不平行的是(　　)



4.(2016 全国Ⅱ卷)α，β 是两个平面，m，n 是两条直线，有下列四个命题：

①如果 $m\perp n$，$m\perp\alpha$，$n/\!/\beta$，那么 $\alpha\perp\beta$.

②如果 $m\perp\alpha$，$n/\!/\alpha$，那么 $m\perp n$.

③如果 $\alpha/\!/\beta$，$m\subset\alpha$，那么 $m/\!/\beta$.

④如果 $m/\!/n$，$\alpha/\!/\beta$，那么 m 与 α 所成的角和 n 与 β 所成的角相等.

其中正确的命题有________(填写所有正确命题的编号).

高频易错题

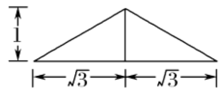
1.(2016 浙江卷)已知互相垂直的平面 α，β 交于直线 l.若直线 m，n 满足 $m/\!/\alpha$，$n\perp\beta$，则(　　)

A.$m/\!/l$　　B.$m/\!/n$　　C.$n\perp l$　　D.$m\perp n$

2.(2017 全国Ⅲ卷)在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 为棱 CD 的中点，则(　　)

A.$A_1E\perp DC_1$　　B.$A_1E\perp BD$　　C.$A_1E\perp BC_1$　　D.$A_1E\perp AC$

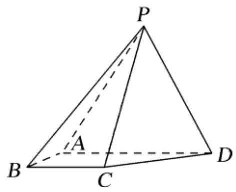
3.(2016 四川卷)已知三棱锥的四个面都是腰长为 2 的等腰三角形，该三棱锥的正视图如图所示，则该三棱锥的体积是________.



正视图

4.(2017 江苏卷)如图，在圆柱 O_1O_2 内有一个球 O，该球与圆柱的上、下面及母线均相切.记圆柱 O_1O_2 的体积为 V_1，球 O 的体积为 V_2，则$\frac{V_1}{V_2}$的值是________.

5.(2017 全国Ⅱ卷)如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中，侧面 PAD 为等边三角形且垂直于底面 $ABCD$，$AB=BC=\frac{1}{2}AD$，$\angle BAD=\angle ABC=90°$.



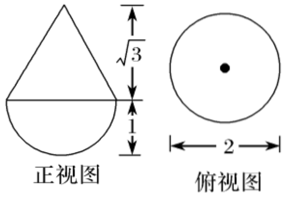
(1)证明：直线 $BC/\!/$平面 PAD；

(2)若$\triangle PCD$ 的面积为 $2\sqrt{7}$，求四棱锥 $P-ABCD$ 的体积.

精准预测题

1.(2017 衡阳联考)如右图所示，某空间几何体的正视图与侧视图相同，则此几何体的表面积为(　　)

A.6π　　B.$\frac{2}{3}\pi+\sqrt{3}$　　C.4π　　D.$2\pi+\sqrt{3}$



2.(2017 菏泽二模)设 m，n 是两条不同的直线，α，β，γ 是三个不同的平面，给出下列四个命题：

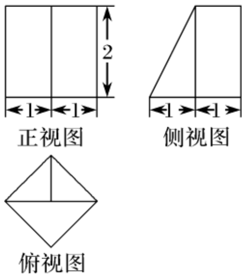
①若 $m\perp\alpha$，$n/\!/\alpha$，则 $m\perp n$；　　②若 $\alpha/\!/\beta$，$\beta/\!/\gamma$，$m\perp\alpha$，则 $m\perp\gamma$；

③若 $m/\!/\alpha$，$n/\!/\alpha$，则 $m/\!/n$；　　④若 $\alpha\perp\gamma$，$\beta\perp\gamma$，则 $\alpha/\!/\beta$.

则其中正确命题的序号是(　　)

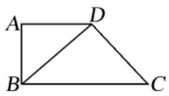
A.①和②　　B.①和④　　C.③和④　　D.②和③

3.(2017 新乡三模)已知一个几何体的三视图如图所示，则该几何体的体积为(　　)



A.$\frac{32}{3}$　　B.$\frac{16}{3}$　　C.$\frac{8}{3}$　　D.$\frac{4}{3}$

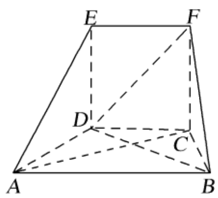
4.如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AD/\!/BC$，$AD=AB$，$\angle BCD=45°$，$\angle BAD=90°$，将$\triangle ADB$ 沿 BD 折起，使平面 $ABD\perp$平面 BCD，构成三棱锥 $A-BCD$，则在三棱锥 $A-BCD$ 中，下列命题正确的命题序号是________.



①平面 $ABD\perp$平面 ABC；　　②平面 $ADC\perp$平面 BDC；

③平面 $ABC\perp$平面 BDC；　　④平面 $ADC\perp$平面 ABC.

5.(2017 石家庄模拟)在如图所示的几何体中，四边形 $CDEF$ 为正方形，四边形 $ABCD$ 为等腰梯形，$AB/\!/CD$，$AC=\sqrt{3}$，$AB=2BC=2$，$AC\perp FB$.



(1)求证：$AC\perp$平面 FBC；

(2)求四面体 $FBCD$ 的体积；

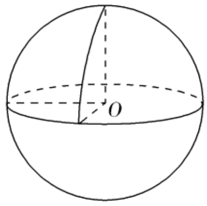
(3)线段 AC 上是否存在点 M，使 $EA/\!/$平面 FDM？若存在，请说明其位置，并加以证明；若不存在，请说明理由.

参考答案

经典常规题

1.【解题思路】该几何体是由球切出来的，算表面积时不应忘了切面的面积.

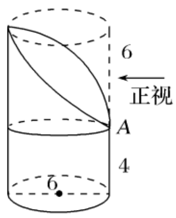
【答案】由题知，该几何体的直观图如图所示，它是一个球(被过球心 O 且互相垂直的三个平面)



切掉左上角的$\frac{1}{8}$后得到的组合体，其表面积是球面面积的$\frac{7}{8}$和三个$\frac{1}{4}$圆面积之和，易得球的半径为 2，则得 $S=\frac{7}{8}\times 4\pi\times 2^2+3\times\frac{1}{4}\pi\times 2^2=17\pi$.故选 A.

2.【解题思路】该几何体是由圆柱切出来的.

【答案】**法一** (割补法)由几何体的三视图可知，该几何体是一个圆柱被截去上面虚线部分所得，如图所示.

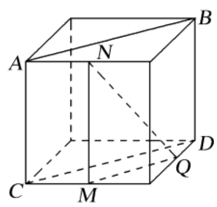


将圆柱补全，并将圆柱体从点 A 处水平分成上下两部分.由图可知，该几何体的体积等于下部分圆柱的体积加上上部分圆柱体积的$\frac{1}{2}$，所以该几何体的体积 $V=\pi\times 3^2\times 4+\pi\times 3^2\times 6\times\frac{1}{2}=63\pi$.

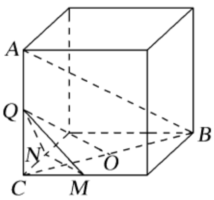
法二 (估值法)由题意知，$\frac{1}{2}V_{圆柱}<V_{几何体}<V_{圆柱}$，又 $V_{圆柱}=\pi\times 3^2\times 10=90\pi$，$\therefore 45\pi<V_{几何体}<90\pi$.观察选项可知只有 63π 符合.故选 B.

3.【解题思路】一一判断其面内是否有线与 AB 平行.

【答案】**法一** 对于选项 B，如图(1)所示，连接 CD，因为 $AB\parallel CD$，M，Q 分别是所在棱的中点，所以 $MQ\parallel CD$，所以 $AB\parallel MQ$，又 $AB\not\subset$平面 MNQ，$MQ\subset$平面 MNQ，所以 $AB\parallel$平面 MNQ.同理可证选项 C，D 中均有 $AB\parallel$平面 MNQ.因此 A 项不正确.



图(1)



图(2)

法二 对于选项 A，其中 O 为 BC 的中点(如图(2)所示)，连接 OQ，则 $OQ/\!/AB$，因为 OQ 与平面 MNQ 有交点，所以 AB 与平面 MNQ 有交点，即 AB 与平面 MNQ 不平行.A 项不正确.故选 A.

4.【解题思路】构建模型表示所给关系，确定所给关系是否成立.

【答案】当 $m\perp n$，$m\perp\alpha$，$n/\!/\beta$ 时，两个平面的位置关系不确定，故①错误，经判断知②③④均正确，故正确答案为②③④.故填②③④.

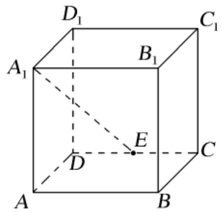
高频易错题

1.【解题思路】根据已知条件画出图形，再进行证明.

【答案】由已知，$\alpha\cap\beta=l$，$\therefore l\subset\beta$，又$\because n\perp\beta$，$\therefore n\perp l$，C 正确.故选 C.

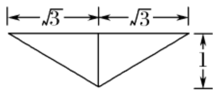
2.【解题思路】$A_1E\subset$平面 A_1B_1CD.

【答案】如图，由题设知，$A_1B_1\perp$平面 BCC_1B_1，从而 $A_1B_1\perp BC_1$.又 $B_1C\perp BC_1$，且 $A_1B_1\cap B_1C=B_1$，所以 $BC_1\perp$平面 A_1B_1CD，又 $A_1E\subset$平面 A_1B_1CD，所以 $A_1E\perp BC_1$.故选 C.



3.【解题思路】由正视图的长和腰长为 2 的等腰三角形确定俯视图形状.

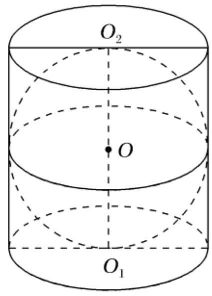
【答案】由题可知，$\because$三棱锥每个面都是腰为 2 的等腰三角形，由正视图可得如下俯视图，且三棱锥高为 $h=1$，则体积 $V=\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times1\right)\times1=\frac{\sqrt{3}}{3}$.故填$\frac{\sqrt{3}}{3}$.



4.【解题思路】由图确定球的半径与圆柱高和底面半径之间的关系，进而求其体积之比.

【答案】设球半径为 R，则圆柱底面圆半径为 R，母线长为 $2R$.

又 $V_1=\pi R^2\cdot2R=2\pi R^3$，$V_2=\frac{4}{3}\pi R^3$，所以$\frac{V_1}{V_2}=\frac{2\pi R^3}{\frac{4}{3}\pi R^3}=\frac{3}{2}$.故填$\frac{3}{2}$.

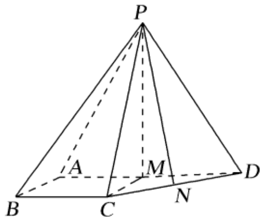


5.【解题思路】(1) $BC/\!/AD$，(2)设出长度，表示$\triangle PCD$ 的面积.

【答案】(1)**证明** 在底面 $ABCD$ 中，因为$\angle BAD=\angle ABC=90^\circ$.所以 $BC/\!/AD$，

又 $BC\not\subset$平面 PAD，$AD\subset$平面 PAD.$\therefore$直线 $BC/\!/$平面 PAD.

(2)解　取 AD 的中点 M，连接 PM，CM，由 $AB=BC=\frac{1}{2}AD$ 及 $BC/\!/AD$，$\angle ABC=90°$ 得四边形 $ABCM$ 为正方形，则 $CM\perp AD$.



因为侧面 PAD 为等边三角形且垂直于底面 $ABCD$，平面 $PAD\cap$平面 $ABCD=AD$，所以 $PM\perp AD$，$PM\perp$底面 $ABCD$，因为 $CM\subset$底面 $ABCD$，所以 $PM\perp CM$.

设 $BC=x$，则 $CM=x$，$CD=\sqrt{2}x$，$PM=\sqrt{3}x$，$PC=PD=2x$，取 CD 的中点 N，连接 PN.

则 $PN\perp CD$，所以 $PN=\frac{\sqrt{14}}{2}x$.因为$\triangle PCD$ 的面积为 $2\sqrt{7}$，所以$\frac{1}{2}\times\sqrt{2}x\times\frac{\sqrt{14}}{2}x=2\sqrt{7}$，

解得 $x=-2$(舍去)或 $x=2$.于是 $AB=BC=2$，$AD=4$，$PM=2\sqrt{3}$.

所以四棱锥 $P-ABCD$ 的体积 $V=\frac{1}{3}\times\frac{2（2+4）}{2}\times2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$.

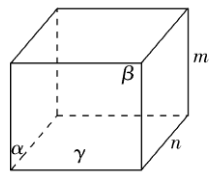
精准预测题

1.【解题思路】半球与圆锥所组成的几何体.

【答案】此几何体为一个组合体，上为一个圆锥，下为一个半球组合而成.表面积为 $S=\frac{4\pi}{2}+\frac{1}{2}\times2\times2\pi=4\pi$.故选 C.

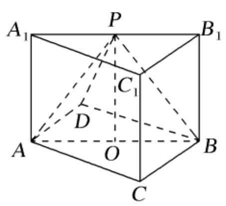
2.【解题思路】在长方体中构建模型表示上述条件与结论.

【答案】①中，过 n 作平面 θ 与平面 α 交于直线 b，则 $n/\!/b$，又 $m\perp\alpha$，知 $m\perp b$，从而 $m\perp n$，正确；②中，由线面垂直、面面平行的性质，$m\perp\gamma$ 成立，正确；如上图所示的几何体中，$m\perp n$，$\alpha\perp\beta$ 成立，则③，④不正确.∴正确的命题序号为①，②.故选 A.



3.【解题思路】还原几何体，并计算其体积.

【答案】由三视图知，该几何体是等底同高的三棱锥 $P-ABD$ 与三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的组合体，其直观图如图所示.



则几何体的体积为 $V=V_{三棱柱}+V_{三棱锥}=\frac{1}{2}\times2\times1\times2+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times1\times2=\frac{8}{3}$.故选 C.

4.【解题思路】由线面垂直可得面面垂直.

【答案】因为在四边形 $ABCD$ 中，$AD\parallel BC$，$AD=AB$，$\angle BCD=45°$，$\angle BAD=90°$，所以 $BD\perp CD$，

又平面 $ABD\perp$平面 BCD，且平面 $ABD\cap$平面 $BCD=BD$，$CD\subset$平面 BCD，

所以 $CD\perp$平面 ABD，又 $AB\subset$平面 ABD，则 $CD\perp AB$，又 $AD\perp AB$，$AD\cap CD=D$，

所以 $AB\perp$平面 ADC，又 $AB\subset$平面 ABC，所以平面 $ABC\perp$平面 ADC.故填④.

5.【解题思路】(1) $AC\perp BC$，(2) $V_{F-BCD}=\frac{1}{3}S\cdot FC$，(3)利用中位线.

【答案】(1)证明　在△ABC 中，

因为 $AC=\sqrt{3}$，$AB=2$，$BC=1$，所以 $AC^2+BC^2=AB^2$，

所以 $AC\perp BC$.

又因为 $AC\perp FB$，$BC\cap FB=B$，BC，$FB\subset$平面 FBC，

所以 $AC\perp$平面 FBC.

(2)解　因为 $AC\perp$平面 FBC，$FC\subset$平面 FBC，

所以 $AC\perp FC$.

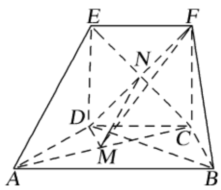
因为 $CD\perp FC$，$AC\cap CD=C$，所以 $FC\perp$平面 $ABCD$.

在等腰梯形 $ABCD$ 中可得 $CB=DC=1$，所以 $FC=1$.

所以△BCD 的面积为 $S=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

所以四面体 $FBCD$ 的体积为 $V_{F-BCD}=\frac{1}{3}S\cdot FC=\frac{\sqrt{3}}{12}$.

(3)解　线段 AC 上存在点 M，且点 M 为 AC 中点时，有 $EA\parallel$平面 FDM.证明如下：



连接 CE，与 DF 交于点 N，取 AC 的中点 M，连接 MN.

因为四边形 $CDEF$ 是正方形，所以点 N 为 CE 的中点.

所以 $EA\parallel MN$.因为 $MN\subset$平面 FDM，$EA\not\subset$平面 FDM，所以 $EA\parallel$平面 FDM.

所以线段 AC 上存在点 M，且 M 为 AC 的中点，使得 $EA\parallel$平面 FDM 成立.