

专题六

选修部分

第1讲 坐标系与参数方程

考向预测



高考主要考查平面直角坐标系中的伸缩变换、直线和圆的极坐标方程;参数方程与普通方程的互化,常见曲线的参数方程及参数方程的简单应用.以极坐标、参数方程与普通方程的互化为主要考查形式,同时考查直线与曲线位置关系等解析几何知识.

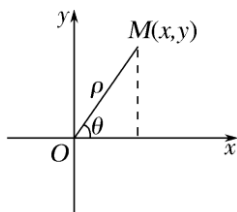
知识与技巧的梳理



1. 直角坐标与极坐标的互化

把直角坐标系的原点作为极点, x 轴正半轴作为极轴, 且在两坐标系中取相同的长度单位. 设 M 是平面内的

任意一点, 它的直角坐标、极坐标分别为 (x, y) 和 (ρ, θ) , 则
$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta, \\ y = \rho \sin \theta, \end{cases} \quad \begin{cases} \rho^2 = x^2 + y^2, \\ \tan \theta = \frac{y}{x} \ (x \neq 0). \end{cases}$$



2. 直线的极坐标方程

若直线过点 $M(\rho_0, \theta_0)$, 且极轴到此直线的角为 α , 则它的方程为 $\rho \sin(\theta - \alpha) = \rho_0 \sin(\theta_0 - \alpha)$.

几个特殊位置的直线的极坐标方程:

(1) 直线过极点: $\theta = \alpha$;

(2) 直线过点 $M(a, 0) (a > 0)$ 且垂直于极轴: $\rho \cos \theta = a$;

(3) 直线过 $M(b, \frac{\pi}{2})$ 且平行于极轴: $\rho \sin \theta = b$.

3. 圆的极坐标方程

几个特殊位置的圆的极坐标方程:

(1) 当圆心位于极点, 半径为 r : $\rho = r$;

(2) 当圆心位于 $M(r, 0)$, 半径为 r : $\rho = 2r \cos \theta$;

(3) 当圆心位于 $M(r, \frac{\pi}{2})$, 半径为 r : $\rho = 2r \sin \theta$.

4. 直线的参数方程

经过点 $P_0(x_0, y_0)$, 倾斜角为 α 的直线的参数方程为
$$\begin{cases} x = x_0 + t \cos \alpha, \\ y = y_0 + t \sin \alpha \end{cases} \quad (t \text{ 为参数}).$$

设 P 是直线上的任一点, 则 t 表示有向线段 $\overrightarrow{P_0P}$ 的数量.

5. 圆、椭圆的参数方程

(1) 圆心在点 $M(x_0, y_0)$, 半径为 r 的圆的参数方程为
$$\begin{cases} x = x_0 + r \cos \theta, \\ y = y_0 + r \sin \theta \end{cases} \quad (\theta \text{ 为参数}, 0 \leq \theta < 2\pi).$$

(2) 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的参数方程为
$$\begin{cases} x = a \cos \theta, \\ y = b \sin \theta \end{cases} \quad (\theta \text{ 为参数}).$$

热点题型

热点一 曲线的极坐标方程

【例 1】(2015 全国 I 卷) 在直角坐标系 xOy 中, 直线 $C_1: x = -2$, 圆 $C_2: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$, 以坐标原点为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系.

(1) 求 C_1, C_2 的极坐标方程;

(2) 若直线 C_3 的极坐标方程为 $\theta = \frac{\pi}{4} (\rho \in \mathbf{R})$, 设 C_2 与 C_3 的交点为 M, N , 求 $\triangle C_2MN$ 的面积.

解 (1) 因为 $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$, 所以 C_1 的极坐标方程为 $\rho \cos \theta = -2$,

C_2 的极坐标方程为 $\rho^2 - 2\rho \cos \theta - 4\rho \sin \theta + 4 = 0$.

(2) 将 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 代入 $\rho^2 - 2\rho \cos \theta - 4\rho \sin \theta + 4 = 0$,

得 $\rho^2 - 3\sqrt{2}\rho + 4 = 0$, 解得 $\rho_1 = 2\sqrt{2}, \rho_2 = \sqrt{2}$. 故 $\rho_1 - \rho_2 = \sqrt{2}$, 即 $|MN| = \sqrt{2}$.

由于 C_2 的半径为 1, 所以 $\triangle C_2MN$ 的面积为 $\frac{1}{2}$.

探究提高 进行极坐标方程与直角坐标方程互化的关键是抓住互化公式: $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta, \rho^2 = x^2 + y^2, \tan \theta = \frac{y}{x} (x \neq 0)$, 要注意 ρ, θ 的取值范围及其影响, 灵活运用代入法和平方法等技巧.

【训练 1】(2017 北京东城区调研) 在极坐标系中, 已知极坐标方程 $C_1: \rho \cos \theta - \sqrt{3}\rho \sin \theta - 1 = 0, C_2: \rho = 2 \cos \theta$.

(1) 求曲线 C_1, C_2 的直角坐标方程, 并判断两曲线的形状;

(2) 若曲线 C_1, C_2 交于 A, B 两点, 求两点间的距离.

解 (1) 由 $C_1: \rho \cos \theta - \sqrt{3}\rho \sin \theta - 1 = 0$,

$\therefore x - \sqrt{3}y - 1 = 0$, 表示一条直线. 由 $C_2: \rho = 2 \cos \theta$, 得 $\rho^2 = 2\rho \cos \theta$.

$\therefore x^2 + y^2 = 2x$, 则 $(x-1)^2 + y^2 = 1$,

$\therefore C_2$ 是圆心为 $(1, 0)$, 半径 $r = 1$ 的圆.

(2) 由(1)知, 点 $(1, 0)$ 在直线 $x - \sqrt{3}y - 1 = 0$ 上, 因此直线 C_1 过圆 C_2 的圆心.

$\therefore$ 两交点 A, B 的连线段是圆 C_2 的直径,

因此两交点 A, B 间的距离 $|AB| = 2r = 2$.

热点二 参数方程及其应用

【例 2】(2014 全国 I 卷)已知曲线 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, 直线 $l: \begin{cases} x=2+t, \\ y=2-2t \end{cases}$ (t 为参数).

(1)写出曲线 C 的参数方程, 直线 l 的普通方程;

(2)过曲线 C 上任一点 P 作与 l 夹角为 30° 的直线, 交 l 于点 A , 求 $|PA|$ 的最大值与最小值.

解 (1)曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x=2\cos \theta, \\ y=3\sin \theta \end{cases}$ (θ 为参数).

直线 l 的普通方程为 $2x+y-6=0$.

(2)曲线 C 上任意一点 $P(2\cos \theta, 3\sin \theta)$ 到 l 的距离为 $d = \frac{\sqrt{5}}{5} |4\cos \theta + 3\sin \theta - 6|$.

则 $|PA| = \frac{d}{\sin 30^\circ} = \frac{2\sqrt{5}}{5} |5\sin(\theta + \alpha) - 6|$, 其中 α 为锐角, 且 $\tan \alpha = \frac{4}{3}$.

当 $\sin(\theta + \alpha) = -1$ 时, $|PA|$ 取得最大值, 最大值为 $\frac{22\sqrt{5}}{5}$;

当 $\sin(\theta + \alpha) = 1$ 时, $|PA|$ 取得最小值, 最小值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

探究提高 1. 将参数方程化为普通方程的过程就是消去参数的过程, 常用的消参方法有代入消参、加减消参、三角恒等式消参等, 往往需要对参数方程进行变形, 为消去参数创造条件.

2. 在与直线、圆、椭圆有关的题目中, 参数方程的使用会使问题的解决事半功倍, 尤其是求取值范围和最值问题, 可将参数方程代入相关曲线的普通方程中, 根据参数的取值条件求解.

【训练 2】(2017 郴州三模)在平面直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x=2\cos \theta, \\ y=2+2\sin \theta \end{cases}$ (θ 为参数), 直线 l

的参数方程为 $\begin{cases} x=1-\frac{\sqrt{2}}{2}t, \\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$ (t 为参数). 以坐标原点 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系.

(1)写出直线 l 的普通方程以及曲线 C 的极坐标方程;

(2)若直线 l 与曲线 C 的两个交点分别为 M, N , 直线 l 与 x 轴的交点为 P , 求 $|PM| \cdot |PN|$ 的值.

解 (1)直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x=1-\frac{\sqrt{2}}{2}t, \\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$ (t 为参数),

消去参数 t , 得 $x+y-1=0$.

曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x=2\cos \theta, \\ y=2+2\sin \theta \end{cases}$ (θ 为参数),

利用平方关系, 得 $x^2 + (y-2)^2 = 4$, 则 $x^2 + y^2 - 4y = 0$.

令 $\rho^2 = x^2 + y^2$, $y = \rho \sin \theta$, 代入得 C 的极坐标方程为 $\rho = 4\sin \theta$.

(2)在直线 $x+y-1=0$ 中, 令 $y=0$, 得点 $P(1, 0)$.

把直线 l 的参数方程代入圆 C 的方程得 $t^2 - 3\sqrt{2}t + 1 = 0$,

$$\therefore t_1 + t_2 = 3\sqrt{2}, \quad t_1 t_2 = 1.$$

由直线参数方程的几何意义, $|PM| \cdot |PN| = |t_1 t_2| = 1$.

限时训练

(45 分钟)

经典常规题

1. (2017·全国 II 卷)在直角坐标系 xOy 中, 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho \cos \theta = 4$.

(1) 设点 M 为曲线 C_1 上的动点, 点 P 在线段 OM 上, 且 $|OM| \cdot |OP| = 16$, 求点 P 的轨迹 C_2 的直角坐标方程;

(2) 设点 A 的极坐标为 $(2, \frac{\pi}{3})$, 点 B 在曲线 C_2 上, 求 $\triangle OAB$ 面积的最大值.

2. (2017·全国 I 卷)在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 3\cos \theta, \\ y = \sin \theta \end{cases}$ (θ 为参数), 直线 l 的参数方程为

$$\begin{cases} x = a + 4t, \\ y = 1 - t \end{cases} \quad (t \text{ 为参数}).$$

(1) 若 $a = -1$, 求 C 与 l 的交点坐标;

(2) 若 C 上的点到 l 距离的最大值为 $\sqrt{17}$, 求 a .

高频易错题

1. (2016·全国 III 卷)在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = \sqrt{3}\cos \alpha, \\ y = \sin \alpha \end{cases}$ (α 为参数), 以坐标原点为极点,

以 x 轴的正半轴为极轴, 建立极坐标系, 曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho \sin(\theta + \frac{\pi}{4}) = 2\sqrt{2}$.

(1) 写出 C_1 的普通方程和 C_2 的直角坐标方程;

(2) 设点 P 在 C_1 上, 点 Q 在 C_2 上, 求 $|PQ|$ 的最小值及此时 P 的直角坐标.

2. (2017 哈尔滨模拟)已知曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x=2+2\cos \theta, \\ y=2\sin \theta \end{cases}$ (θ 为参数), 以坐标原点 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 直线 l 的极坐标方程为 $\rho \sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=4$.
- (1)写出曲线 C 的极坐标方程和直线 l 的普通方程;
- (2)若射线 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 与曲线 C 交于 O, A 两点, 与直线 l 交于 B 点, 射线 $\theta=\frac{11\pi}{6}$ 与曲线 C 交于 O, P 两点, 求 $\triangle PAB$ 的面积.

精准预测题

1. (2017 新乡三模)以坐标原点 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 已知曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=4\cos \theta$, 曲线 M 的直角坐标方程为 $x-2y+2=0(x>0)$.
- (1)以曲线 M 上的点与点 O 连线的斜率 k 为参数, 写出曲线 M 的参数方程;
- (2)设曲线 C 与曲线 M 的两个交点为 A, B , 求直线 OA 与直线 OB 的斜率之和.
2. (2017 ·乐山二模)在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x=1+t\cos \theta, \\ y=t\sin \theta \end{cases}$ (t 为参数, $0\leq \theta<\pi$), 以坐标原点为极点, x 轴的非负半轴为极轴建立极坐标系, 圆 C 的极坐标方程为 $\rho=-4\cos \alpha$, 圆 C 的圆心到直线 l 的距离为 $\frac{3}{2}$.
- (1)求 θ 的值;
- (2)已知 $P(1, 0)$, 若直线 l 与圆 C 交于 A, B 两点, 求 $\frac{1}{|PA|}+\frac{1}{|PB|}$ 的值.

参考答案

经典常规题

1. 【解题思路】 (1) 由 $|OM| \cdot |OP| = 16$ 得出 P 的轨迹 C_2 ; (2) 由 $S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} |OA| |OB| \sin \angle AOB$ 转化三角函数可得, 亦可 $S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} |OA| d$ 转化点到直线距离可得.

【答案】解 (1) 设 P 的极坐标为 $(\rho, \theta) (\rho > 0)$, M 的极坐标为 $(\rho_1, \theta) (\rho_1 > 0)$.

由题设知 $|OP| = \rho$, $|OM| = \rho_1 = \frac{4}{\cos \theta}$.

由 $|OM| \cdot |OP| = 16$ 得 C_2 的极坐标方程为 $\rho = 4 \cos \theta (\rho > 0)$.

因此 C_2 的直角坐标方程为 $(x-2)^2 + y^2 = 4 (x \neq 0)$.

(2) 设点 B 的极坐标为 $(\rho_B, \alpha) (\rho_B > 0)$.

由题设知 $|OA| = 2$, $\rho_B = 4 \cos \alpha$, 于是 $\triangle OAB$ 的面积

$$S = \frac{1}{2} |OA| \rho_B \sin \angle AOB = 4 \cos \alpha \cdot \left| \sin \left(\alpha - \frac{\pi}{3} \right) \right| = 2 \left| \sin \left(2\alpha - \frac{\pi}{3} \right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \right| \leq 2 + \sqrt{3}.$$

当 $\alpha = -\frac{\pi}{12}$ 时, S 取得最大值 $2 + \sqrt{3}$.

所以 $\triangle OAB$ 面积的最大值为 $2 + \sqrt{3}$.

2. 【解题思路】 (1) 曲线 C 利用 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ 消参, 直线 l 代入消元化为普通方程, 联立即可. (2) 利用点到直线距离公式, 曲线 C 直接用参数方程, 用三角函数求其最值.

【答案】解 (1) $a = -1$ 时, 直线 l 的普通方程为 $x + 4y - 3 = 0$.

曲线 C 的标准方程是 $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$,

$$\text{联立方程} \begin{cases} x + 4y - 3 = 0, \\ \frac{x^2}{9} + y^2 = 1, \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} x = 3, \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x = -\frac{21}{25}, \\ y = \frac{24}{25}. \end{cases}$$

则 C 与 l 交点坐标是 $(3, 0)$ 和 $\left(-\frac{21}{25}, \frac{24}{25}\right)$.

(2) 直线 l 的普通方程是 $x + 4y - 4 - a = 0$.

设曲线 C 上点 $P(3 \cos \theta, \sin \theta)$.

$$\text{则 } P \text{ 到 } l \text{ 距离 } d = \frac{|3 \cos \theta + 4 \sin \theta - 4 - a|}{\sqrt{17}} = \frac{|5 \sin(\theta + \varphi) - 4 - a|}{\sqrt{17}},$$

其中 $\tan \varphi = \frac{3}{4}$.

又点 C 到直线 l 距离的最大值为 $\sqrt{17}$.

$\therefore |5 \sin(\theta + \varphi) - 4 - a|$ 的最大值为 17.

若 $a \geq 0$, 则 $-5-4-a=-17$, $\therefore a=8$.

若 $a < 0$, 则 $5-4-a=17$, $\therefore a=-16$.

综上, 实数 a 的值为 $a=-16$ 或 $a=8$.

高频易错题

1. 【解题思路】 (1) 曲线 C_1 利用 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ 消参, 曲线 C_2 利用 $\begin{cases} x = \rho \cos \theta, \\ y = \rho \sin \theta, \end{cases}$ 化为直角坐标方程. (2) 利用点到直线距离公式, 曲线 C_1 直接用参数方程, 用三角函数求其最值.

【答案】解 (1) C_1 的普通方程为 $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$, 曲线 C_2 的直角坐标方程为 $x + y - 4 = 0$.

(2) 由题意, 可设点 P 的直角坐标为 $(\sqrt{3}\cos \alpha, \sin \alpha)$. 因为 C_2 是直线, 所以 $|PQ|$ 的最小值即为 P 到 C_2 的距离 $d(\alpha)$ 的最小值.

又 $d(\alpha) = \frac{|\sqrt{3}\cos \alpha + \sin \alpha - 4|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \left| \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) - 2 \right|$, 当且仅当 $\alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{6} (k \in \mathbf{Z})$ 时, $d(\alpha)$ 取得最小值, 最小值为 $\sqrt{2}$,

此时点 P 的直角坐标为 $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

2. 【解题思路】 (1) 曲线 C_1 利用 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ 消参, 曲线 C_2 利用 $\begin{cases} x = \rho \cos \theta, \\ y = \rho \sin \theta, \end{cases}$ 化为直角坐标方程. (2) 分别联立求出 A, B, P 的坐标.

【答案】解 (1) 由 $\begin{cases} x = 2 + 2\cos \theta, \\ y = 2\sin \theta \end{cases}$ (θ 为参数), 消去 θ .

普通方程为 $(x-2)^2 + y^2 = 4$.

从而曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2 - 4\rho \cos \theta = 0$, 即 $\rho = 4\cos \theta$,

因为直线 l 的极坐标方程为 $\rho \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = 4$, 即 $\frac{\sqrt{3}}{2}\rho \sin \theta + \frac{1}{2}\rho \cos \theta = 4$,

$\therefore$ 直线 l 的直角坐标方程为 $x + \sqrt{3}y - 8 = 0$.

(2) 依题意, A, B 两点的极坐标分别为 $\left(2, \frac{\pi}{3}\right), \left(4, \frac{\pi}{3}\right)$,

联立射线 $\theta = \frac{11\pi}{6}$ 与曲线 C 的极坐标方程,

得 P 点极坐标为 $\left(2\sqrt{3}, \frac{11\pi}{6}\right)$,

$\therefore |AB| = 2$,

$\therefore S_{\triangle PAB} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{3} \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = 2\sqrt{3}$.

精准预测题

1. 【解题思路】 (1) $OM: y = kx$; (2) 联立曲线 M 的参数方程和曲线 C 的直角坐标方程, 韦达定理.

【答案】解 (1)由 $\begin{cases} x-2y+2=0 & (x>0) \\ y=kx \end{cases}$, 得 $\begin{cases} x=\frac{2}{2k-1}, \\ y=\frac{2k}{2k-1}. \end{cases}$

故曲线 M 的参数方程为 $\begin{cases} x=\frac{2}{2k-1}, \\ y=\frac{2k}{2k-1} \end{cases}$ (k 为参数, 且 $k>\frac{1}{2}$).

(2)由 $\rho=4\cos\theta$, 得 $\rho^2=4\rho\cos\theta$, $\therefore x^2+y^2=4x$.

将 $\begin{cases} x=\frac{2}{2k-1}, \\ y=\frac{2k}{2k-1} \end{cases}$ 代入 $x^2+y^2=4x$ 整理得 $k^2-4k+3=0$,

$\therefore k_1+k_2=4$.

故直线 OA 与直线 OB 的斜率之和为 4.

2. 【解题思路】 (1)利用点到直线的距离公式列方程可得. (2)联立直线的参数方程和圆的直角坐标方程可得 t 的一元二次方程, 利用韦达定理求 $\frac{1}{|PA|}+\frac{1}{|PB|}$.

【答案】解 (1)由直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x=1+t\cos\theta, \\ y=t\sin\theta \end{cases}$ (t 为参数, $0\leq\theta<\pi$), 消去参数 t , 可得: $x\sin\theta-y\cos\theta-\sin\theta=0$.

圆 C 的极坐标方程为 $\rho=-4\cos\alpha$, 即 $\rho^2=-4\rho\cos\alpha$.

可得圆 C 的普通坐标方程为: $x^2+y^2+4x=0$,

可知圆心为 $(-2, 0)$, 圆 C 的圆心到直线 l 的距离为 $d=\frac{|-2\sin\theta-\sin\theta|}{\sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta}}=3\sin\theta$.

由题意: $d=\frac{3}{2}$, 即 $3\sin\theta=\frac{3}{2}$, 则 $\sin\theta=\frac{1}{2}$,

$\because 0\leq\theta<\pi$,

$\therefore \theta=\frac{\pi}{6}$ 或 $\theta=\frac{5\pi}{6}$.

(2)已知 $P(1, 0)$, 点 P 在直线 l 上, 直线 l 与圆 C 交于 A, B 两点, 将 $\begin{cases} x=1+t\cos\theta, \\ y=t\sin\theta \end{cases}$ 代入圆 C 的普通坐标方

程 $x^2+y^2+4x=0$,

得 $(1+t\cos\theta)^2+(t\sin\theta)^2+4(1+t\cos\theta)=0$,

$\therefore t^2+6t\cos\theta+5=0$.

设 A, B 对应参数为 t_1, t_2 , 则 $t_1+t_2=-6\cos\theta$, $t_1t_2=5$,

$\because t_1t_2>0$, t_1, t_2 是同号.

$\therefore \frac{1}{|PA|}+\frac{1}{|PB|}=\frac{1}{|t_1|}+\frac{1}{|t_2|}=\frac{|t_1|+|t_2|}{|t_1t_2|}=\frac{|t_1+t_2|}{|t_1t_2|}=\frac{3\sqrt{3}}{5}$.

