

高中函数大题专练

1、已知关于 x 的不等式 $(kx - k^2 - 4)(x - 4) > 0$ ，其中 $k \in R$ 。

(1) 试求不等式的解集 A ；

(2) 对于不等式的解集 A ，若满足 $A \cap Z = B$ （其中 Z 为整数集）。试探究集合 B 能否为有限集？若能，求出使得集合 B 中元素个数最少的 k 的所有取值，并用列举法表示集合 B ；若不能，请说明理由。

2、对定义在 $[0, 1]$ 上，并且同时满足以下两个条件的函数 $f(x)$ 称为 G 函数。

① 对任意的 $x \in [0, 1]$ ，总有 $f(x) \geq 0$ ；

② 当 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \leq 1$ 时，总有 $f(x_1 + x_2) \geq f(x_1) + f(x_2)$ 成立。

已知函数 $g(x) = x^2$ 与 $h(x) = a \cdot 2^x - 1$ 是定义在 $[0, 1]$ 上的函数。

(1) 试问函数 $g(x)$ 是否为 G 函数？并说明理由；

(2) 若函数 $h(x)$ 是 G 函数，求实数 a 的值；

(3) 在 (2) 的条件下，讨论方程 $g(2^x - 1) + h(x) = m$ ($m \in R$) 解的个数情况。

3. 已知函数 $f(x) = 2^x - \frac{1}{2^{|x|}}$ 。

(1) 若 $f(x) = 2$ ，求 x 的值；

(2) 若 $2^t f(2t) + m f(t) \geq 0$ 对于 $t \in [2, 3]$ 恒成立，求实数 m 的取值范围。

4. 设函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数. 若当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x}, & x > 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

(1) 求 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上的解析式.

(2) 请你作出函数 $f(x)$ 的大致图像.

(3) 当 $0 < a < b$ 时, 若 $f(a) = f(b)$, 求 ab 的取值范围.

(4) 若关于 x 的方程 $f^2(x) + bf(x) + c = 0$ 有 7 个不同实数解, 求 b, c 满足的条件.

5. 已知函数 $f(x) = a - \frac{b}{|x|}$ ($x \neq 0$)。

(1) 若函数 $f(x)$ 是 $(0, +\infty)$ 上的增函数，求实数 b 的取值范围；

(2) 当 $b = 2$ 时，若不等式 $f(x) < x$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上恒成立，求实数 a 的取值范围；

(3) 对于函数 $g(x)$ 若存在区间 $[m, n]$ ($m < n$)，使 $x \in [m, n]$ 时，函数 $g(x)$ 的值域也是

6. 设 $f(x) = \sqrt{ax^2 + bx}$, 求满足下列条件的实数 a 的值: 至少有一个正实数 b , 使函数 $f(x)$ 的定义域和值域相同。

7. 对于函数 $f(x)$, 若存在 $x_0 \in R$, 使 $f(x_0) = x_0$ 成立, 则称点 (x_0, x_0) 为函数的不动点。

(1) 已知函数 $f(x) = ax^2 + bx - b (a \neq 0)$ 有不动点 $(1, 1)$ 和 $(-3, -3)$ 求 a 与 b 的值;

(2) 若对于任意实数 b , 函数 $f(x) = ax^2 + bx - b (a \neq 0)$ 总有两个相异的不动点, 求 a 的取值范围;

(3) 若定义在实数集 R 上的奇函数 $g(x)$ 存在 (有限的) n 个不动点, 求证: n 必为奇数。

8. 设函数 $f(x) = x + \frac{1}{x}$, ($x \neq 0$) 的图象为 C_1 , C_1 关于点 $A(2, 1)$ 的对称的图象为 C_2 ,

C_2 对应的函数为 $g(x)$.

(1) 求函数 $y = g(x)$ 的解析式;

(2) 若直线 $y = b$ 与 C_2 只有一个交点, 求 b 的值并求出交点的坐标.

9. 设定义在 $(0, +\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 满足下面三个条件:

① 对于任意正实数 a, b , 都有 $f(a \cdot b) = f(a) + f(b) - 1$;

② $f(2) = 0$;

③ 当 $x > 1$ 时, 总有 $f(x) < 1$.

(1) 求 $f(1)$ 及 $f(\frac{1}{2})$ 的值;

(2) 求证: $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是减函数.

10. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $[-2, 2]$ 上的奇函数, 当 $x \in [-2, 0)$ 时, $f(x) = tx - \frac{1}{2}x^3$ (t 为常数).

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式;

11. 记函数 $f(x) = \sqrt{2 - \frac{x+7}{x+2}}$ 的定义域为 A , $g(x) = \lg[(2x-b)(ax+1)] (b > 0, a \in R)$ 的定义域为 B ,

(1) 求 A ;

(2) 若 $A \subseteq B$, 求 a 、 b 的取值范围

12. 设 $f(x) = \frac{a^x + 1}{1 - a^x} (a > 0, a \neq 1)$.

(1) 求 $f(x)$ 的反函数 $f^{-1}(x)$;

(2) 讨论 $f^{-1}(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上的单调性, 并加以证明;

(3) 令 $g(x) = 1 + \log_a x$, 当 $[m, n] \subset (1, +\infty) (m < n)$ 时, $f^{-1}(x)$ 在 $[m, n]$ 上的值域是 $[g(n), g(m)]$, 求 a 的取值范围.

13. 集合 A 是由具备下列性质的函数 $f(x)$ 组成的:

(1) 函数 $f(x)$ 的定义域是 $[0, +\infty)$;

(2) 函数 $f(x)$ 的值域是 $[-2, 4)$;

(3) 函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上是增函数. 试分别探究下列两小题:

(I) 判断函数 $f_1(x) = \sqrt{x} - 2 (x \geq 0)$, 及 $f_2(x) = 4 - 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x (x \geq 0)$ 是否属于集合 A ? 并简要说明理由.

(II) 对于 (I) 中你认为属于集合 A 的函数 $f(x)$, 不等式 $f(x) + f(x+2) < 2f(x+1)$, 是否对于任意的 $x \geq 0$ 总成立? 若不成立, 为什么? 若成立, 请证明你的结论.

14. 设函数 $f(x) = ax^2 + bx + 1$ (a, b 为实数), $F(x) = \begin{cases} f(x) & (x > 0) \\ -f(x) & (x < 0) \end{cases}$

(1) 若 $f(-1) = 0$ 且对任意实数 x 均有 $f(x) \geq 0$ 成立, 求 $F(x)$ 表达式.

(2) 在 (1) 的条件下, 当 $x \in [-2, 2]$ 时, $g(x) = f(x) - kx$ 是单调函数, 求实数 k 的取值范围.

(3) (理) 设 $m > 0, n < 0$ 且 $m+n > 0, a > 0$ 且 $f(x)$ 为偶函数, 求证: $F(m) + F(n) > 0$.

15. 函数 $f(x) = \frac{x}{ax+b}$ (a, b 是非零实常数), 满足 $f(2) = 1$, 且方程 $f(x) = x$ 有且仅有一个解.

(1) 求 a, b 的值;

(2) 是否存在实常数 m , 使得对定义域中任意的 x , $f(x) + f(m-x) = 4$ 恒成立? 为什么?

(3) 在直角坐标系中, 求定点 $A(-3, 1)$ 到此函数图象上任意一点 P 的距离 $|AP|$ 的最小值.

函数大题专练答案

1、已知关于 x 的不等式 $(kx - k^2 - 4)(x - 4) > 0$ ，其中 $k \in R$ 。

(1) 试求不等式的解集 A ；

(2) 对于不等式的解集 A ，若满足 $A \cap Z = B$ （其中 Z 为整数集）。试探究集合 B 能否为有限集？若能，求出使得集合 B 中元素个数最少的 k 的所有取值，并用列举法表示集合 B ；若不能，请说明理由。

解 (1) 当 $k = 0$ 时， $A = (-\infty, 4)$ ；当 $k > 0$ 且 $k \neq 2$ 时， $A = (-\infty, 4) \cup (k + \frac{4}{k}, +\infty)$ ；

当 $k = 2$ 时， $A = (-\infty, 4) \cup (4, +\infty)$ ；（不单独分析 $k = 2$ 时的情况不扣分）

当 $k < 0$ 时， $A = (k + \frac{4}{k}, 4)$ 。

(2) 由 (1) 知：当 $k \geq 0$ 时，集合 B 中的元素的个数无限；

当 $k < 0$ 时，集合 B 中的元素的个数有限，此时集合 B 为有限集。

因为 $k + \frac{4}{k} \leq -4$ ，当且仅当 $k = -2$ 时取等号，

所以当 $k = -2$ 时，集合 B 的元素个数最少。

此时 $A = (-4, 4)$ ，故集合 $B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ 。

2、对定义在 $[0, 1]$ 上，并且同时满足以下两个条件的函数 $f(x)$ 称为 G 函数。

① 对任意的 $x \in [0, 1]$ ，总有 $f(x) \geq 0$ ；

② 当 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \leq 1$ 时，总有 $f(x_1 + x_2) \geq f(x_1) + f(x_2)$ 成立。

已知函数 $g(x) = x^2$ 与 $h(x) = a \cdot 2^x - 1$ 是定义在 $[0, 1]$ 上的函数。

(1) 试问函数 $g(x)$ 是否为 G 函数？并说明理由；

(2) 若函数 $h(x)$ 是 G 函数，求实数 a 的值；

(3) 在 (2) 的条件下，讨论方程 $g(2^x - 1) + h(x) = m$ ($m \in R$) 解的个数情况。

解 (1) 当 $x \in [0, 1]$ 时，总有 $g(x) = x^2 \geq 0$ ，满足①，

当 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \leq 1$ 时，

$g(x_1 + x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 \geq x_1^2 + x_2^2 = g(x_1) + g(x_2)$ ，满足②

(2) 若 $a < 1$ 时， $h(0) = a - 1 < 0$ 不满足①，所以不是 G 函数；

若 $a \geq 1$ 时， $h(x)$ 在 $x \in [0, 1]$ 上是增函数，则 $h(x) \geq 0$ ，满足①

由 $h(x_1 + x_2) \geq h(x_1) + h(x_2)$ ，得 $a \cdot 2^{x_1 + x_2} - 1 \geq a \cdot 2^{x_1} - 1 + a \cdot 2^{x_2} - 1$ ，

即 $a[1 - (2^{x_1} - 1)(2^{x_2} - 1)] \leq 1$ ，

因为 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \leq 1$

所以 $0 \leq 2^{x_1} - 1 \leq 1$ $0 \leq 2^{x_2} - 1 \leq 1$ x_1 与 x_2 不同时等于 1 $\therefore 0 \leq (2^{x_1} - 1)(2^{x_2} - 1) < 1$

$\therefore a \leq \frac{1}{1 - (2^{x_1} - 1)(2^{x_2} - 1)}$

$$\text{由} \begin{cases} 0 \leq 2^x - 1 \leq 1 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad \text{得} \quad x \in [0, 1]$$

$$\text{令 } 2^x = t \in [1, 2], \text{ 则 } m = t^2 - t = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

由图形可知：当 $m \in [0, 2]$ 时，有一解；

当 $m \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ 时，方程无解。

$$3. \text{ 已知函数 } f(x) = 2^x - \frac{1}{2^{|x|}}.$$

(1) 若 $f(x) = 2$ ，求 x 的值；

(2) 若 $2^t f(2t) + m f(t) \geq 0$ 对于 $t \in [2, 3]$ 恒成立，求实数 m 的取值范围。

$$[\text{解}] \quad (1) \text{ 当 } x < 0 \text{ 时, } f(x) = 0; \text{ 当 } x \geq 0 \text{ 时, } f(x) = 2^x - \frac{1}{2^x}.$$

$$\text{由条件可知 } 2^x - \frac{1}{2^x} = 2, \text{ 即 } 2^{2x} - 2 \cdot 2^x - 1 = 0,$$

$$\text{解得 } 2^x = 1 \pm \sqrt{2}.$$

$$\because 2^x > 0, \therefore x = \log_2(1 + \sqrt{2}).$$

$$(2) \text{ 当 } t \in [1, 2] \text{ 时, } 2^t \left(2^{2t} - \frac{1}{2^{2t}} \right) + m \left(2^t - \frac{1}{2^t} \right) \geq 0,$$

$$\text{即 } m(2^{2t} - 1) \geq -(2^{4t} - 1).$$

$$\because 2^{2t} - 1 > 0, \therefore m \geq -(2^{2t} + 1).$$

$$\because t \in [2, 3], \therefore -(1 + 2^{2t}) \in [-65, -17],$$

故 m 的取值范围是 $[-17, +\infty)$ 。

$$4. \text{ 设函数 } f(x) \text{ 是定义在 } \mathbf{R} \text{ 上的偶函数. 若当 } x \geq 0 \text{ 时, } f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x}, & x > 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

(1) 求 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上的解析式。

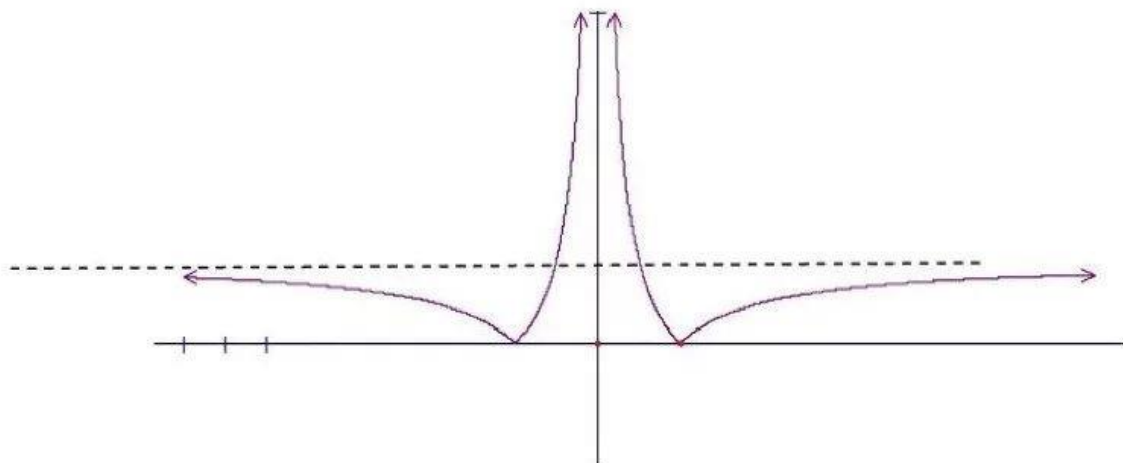
(2) 请你作出函数 $f(x)$ 的大致图像。

(3) 当 $0 < a < b$ 时，若 $f(a) = f(b)$ ，求 ab 的取值范围。

(4) 若关于 x 的方程 $f^2(x) + bf(x) + c = 0$ 有 7 个不同实数解，求 b, c 满足的条件。

$$[\text{解}] \quad (1) \text{ 当 } x \in (-\infty, 0) \text{ 时, } f(x) = f(-x) = \left| 1 - \frac{1}{-x} \right| = \left| 1 + \frac{1}{x} \right|.$$

(2) $f(x)$ 的大致图像如下：.



(3) 因为 $0 < a < b$, 所以 $f(a) = f(b)$

$$\Leftrightarrow \left|1 - \frac{1}{a}\right| = \left|1 - \frac{1}{b}\right| \Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{a}\right)^2 = \left(1 - \frac{1}{b}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 2,$$

$$\Leftrightarrow a + b = 2ab > 2\sqrt{ab}$$

解得 ab 的取值范围是 $(1, +\infty)$.

(4) 由 (2), 对于方程 $f(x) = a$, 当 $a = 0$ 时, 方程有 3 个根; 当 $0 < a < 1$ 时, 方程有 4 个根, 当 $a \geq 1$ 时, 方程有 2 个根; 当 $a < 0$ 时, 方程无解. ...15 分

所以, 要使关于 x 的方程 $f^2(x) + bf(x) + c = 0$ 有 7 个不同实数解, 关于 $f(x)$ 的方程 $f^2(x) + bf(x) + c = 0$ 有一个在区间 $(0, 1)$ 的正实数根和一个等于零的根。

所以 $c = 0, f(x) = -b \in (0, 1)$, 即 $-1 < b < 0, c = 0$.

5. 已知函数 $f(x) = a - \frac{b}{|x|} (x \neq 0)$ 。

(1) 若函数 $f(x)$ 是 $(0, +\infty)$ 上的增函数, 求实数 b 的取值范围;

(2) 当 $b = 2$ 时, 若不等式 $f(x) < x$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上恒成立, 求实数 a 的取值范围;

(3) 对于函数 $g(x)$ 若存在区间 $[m, n] (m < n)$, 使 $x \in [m, n]$ 时, 函数 $g(x)$ 的值域也是

$[m, n]$, 则称 $g(x)$ 是 $[m, n]$ 上的闭函数。若函数 $f(x)$ 是某区间上的闭函数, 试探

求 a, b 应满足的条件。

解 (1) 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f(x) = a - \frac{b}{x}$

设 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ 且 $x_1 < x_2$, 由 $f(x)$ 是 $(0, +\infty)$ 上的增函数, 则 $f(x_1) < f(x_2)$

(2) 当 $b=2$ 时, $f(x)=a-\frac{2}{|x|}<x$ 在 $x\in(1,+\infty)$ 上恒成立, 即 $a<x+\frac{2}{x}$

因为 $x+\frac{2}{x}\geq 2\sqrt{2}$, 当 $x=\frac{2}{x}$ 即 $x=\sqrt{2}$ 时取等号,

$\sqrt{2}\in(1,+\infty)$, 所以 $x+\frac{2}{x}$ 在 $x\in(1,+\infty)$ 上的最小值为 $2\sqrt{2}$. 则 $a<2\sqrt{2}$

(3) 因为 $f(x)=a-\frac{b}{|x|}$ 的定义域是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, 设 $f(x)$ 是区间 $[m,n]$ 上的闭函

数, 则 $mn>0$ 且 $b\neq 0$

(4) ①若 $0<m<n$

当 $b>0$ 时, $f(x)=a-\frac{b}{|x|}$ 是 $(0,+\infty)$ 上的增函数, 则 $\begin{cases} f(m)=m \\ f(n)=n \end{cases}$,

所以方程 $a-\frac{b}{x}=x$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两不等实根,

即 $x^2-ax+b=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两不等实根, 所以

$$\begin{cases} a^2-4b>0 \\ x_1+x_2=a>0, \text{ 即 } a>0, b>0 \text{ 且 } a^2-4b>0 \\ x_1\cdot x_2=b>0 \end{cases}$$

当 $b<0$ 时, $f(x)=a-\frac{b}{|x|}=a+\frac{-b}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上递减, 则 $\begin{cases} f(m)=n \\ f(n)=m \end{cases}$, 即

$$\begin{cases} a-\frac{b}{m}=n \\ a-\frac{b}{n}=m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ mn=-b \end{cases}, \text{ 所以 } a=0, b<0$$

②若 $m<n<0$

当 $b>0$ 时, $f(x)=a-\frac{b}{|x|}=a+\frac{b}{x}$ 是 $(-\infty,0)$ 上的减函数, 所以 $\begin{cases} f(m)=n \\ f(n)=m \end{cases}$, 即

$$\begin{cases} a+\frac{b}{m}=n \\ a+\frac{b}{n}=m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ mn=b \end{cases}, \text{ 所以 } a=0, b>0$$

解 (1) 若 $a = 0$ ，则对于每个正数 b ， $f(x) = \sqrt{bx}$ 的定义域和值域都是 $[0, +\infty)$

故 $a = 0$ 满足条件

(2) 若 $a > 0$ ，则对于正数 b ， $f(x) = \sqrt{ax^2 + bx}$ 的定义域为 $D = \left(-\infty, -\frac{b}{a}\right] \cup [0, +\infty)$ ，

但 $f(x)$ 的值域 $A \subseteq [0, +\infty)$ ，故 $D \neq A$ ，即 $a > 0$ 不合条件；

(3) 若 $a < 0$ ，则对正数 b ，定义域 $D = [0, -\frac{b}{a}]$ $(f(x))_{\max} = \frac{b}{2\sqrt{-a}}$ ，

$$f(x) \text{ 的值域为 } [0, \frac{b}{2\sqrt{-a}}], \quad -\frac{b}{a} = \frac{b}{2\sqrt{-a}} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ 2\sqrt{-a} = -a \end{cases} \Leftrightarrow a = -4$$

综上所述： a 的值为 0 或 -4

7. 对于函数 $f(x)$ ，若存在 $x_0 \in \mathbb{R}$ ，使 $f(x_0) = x_0$ 成立，则称点 (x_0, x_0) 为函数的不动点。

(1) 已知函数 $f(x) = ax^2 + bx - b (a \neq 0)$ 有不动点 $(1, 1)$ 和 $(-3, -3)$ 求 a 与 b 的值；

(2) 若对于任意实数 b ，函数 $f(x) = ax^2 + bx - b (a \neq 0)$ 总有两个相异的不动点，求 a 的取值范围；

(3) 若定义在实数集 $\mathbb{R}$ 上的奇函数 $g(x)$ 存在（有限的） n 个不动点，求证： n 必为奇数。

解：(1) 由不动点的定义： $f(x) - x = 0$ ， $\therefore ax^2 + (b-1)x - b = 0$

代入 $x = 1$ 知 $a = 1$ ，又由 $x = -3$ 及 $a = 1$ 知 $b = 3$ 。

$$\therefore a = 1, b = 3.$$

(2) 对任意实数 b ， $f(x) = ax^2 + bx - b (a \neq 0)$ 总有两个相异的不动点，即是对任意的实数 b ，方程 $f(x) - x = 0$ 总有两个相异的实数根。

$$\therefore ax^2 + (b-1)x - b = 0 \text{ 中 } \Delta = (b-1)^2 + 4ab > 0,$$

$$\text{即 } b^2 + (4a-2)b + 1 > 0 \text{ 恒成立。故 } \Delta = (4a-2)^2 - 4 \leq 0, \therefore 0 \leq a \leq 1.$$

$\therefore g(x)$ 的有限个不动点除原点外，都是成对出现的，

所以有 $2k$ 个 ($k \in N$)，加上原点，共有 $n = 2k + 1$ 个。即 n 必为奇数

8. 设函数 $f(x) = x + \frac{1}{x}$, ($x \neq 0$) 的图象为 C_1 、 C_1 关于点 $A(2, 1)$ 的对称的图象为 C_2 ，

C_2 对应的函数为 $g(x)$ 。

(1) 求函数 $y = g(x)$ 的解析式；

(2) 若直线 $y = b$ 与 C_2 只有一个交点，求 b 的值并求出交点的坐标。

解. (1) 设 $p(u, v)$ 是 $y = x + \frac{1}{x}$ 上任意一点， $\therefore v = u + \frac{1}{u}$ ①

设 P 关于 $A(2, 1)$ 对称的点为 $Q(x, y)$ ， $\therefore \begin{cases} u + x = 4 \\ v + y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 4 - x \\ v = 2 - y \end{cases}$

代入①得 $2 - y = 4 - x + \frac{1}{4 - x} \Rightarrow y = x - 2 + \frac{1}{x - 4}$

$\therefore g(x) = x - 2 + \frac{1}{x - 4}$ ($x \in (-\infty, 4) \cup (4, +\infty)$)；

(2) 联立 $\begin{cases} y = b \\ y = x - 2 + \frac{1}{x - 4} \end{cases} \Rightarrow x^2 - (b + 6)x + 4b + 9 = 0,$

$\therefore \Delta = (b + 6)^2 - 4 \times (4b + 9) = b^2 - 4b = 0 \Rightarrow b = 0$ 或 $b = 4$,

(1) 当 $b = 0$ 时得交点 $(3, 0)$ ； (2) 当 $b = 4$ 时得交点 $(5, 4)$ 。

9. 设定义在 $(0, +\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 满足下面三个条件：

① 对于任意正实数 a, b ，都有 $f(a \cdot b) = f(a) + f(b) - 1$ ；

② $f(2) = 0$ ；

③ 当 $x > 1$ 时，总有 $f(x) < 1$ 。

(1) 求 $f(1)$ 及 $f(\frac{1}{2})$ 的值；

(2) 求证： $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是减函数。

得: $f(\frac{1}{2}) = f(1) - f(2) + 1 = 1 + 1 = 2$

(2) 设 $0 < x_1 < x_2$, 则: $f(x_2) - f(x_1) = f(\frac{x_2}{x_1} \cdot x_1) - f(x_1) = [f(\frac{x_2}{x_1}) + f(x_1) - 1] - f(x_1)$
 $= f(\frac{x_2}{x_1}) - 1$ 依 $0 < x_1 < x_2$, 可得 $\frac{x_2}{x_1} > 1$

再依据当 $x > 1$ 时, 总有 $f(x) < 1$ 成立, 可得 $f(\frac{x_2}{x_1}) < 1$

即 $f(x_2) - f(x_1) < 0$ 成立, 故 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是减函数。

10. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $[-2, 2]$ 上的奇函数, 当 $x \in [-2, 0)$ 时, $f(x) = tx - \frac{1}{2}x^3$ (t 为常数)。

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式;

(2) 当 $t \in [2, 6]$ 时, 求 $f(x)$ 在 $[-2, 0]$ 上的最小值, 及取得最小值时的 x , 并猜想 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上的单调递增区间 (不必证明);

(3) 当 $t \geq 9$ 时, 证明: 函数 $y = f(x)$ 的图象上至少有一个点落在直线 $y = 14$ 上。

解 (1) $x \in (0, 2]$ 时, $-x \in [-2, 0)$, 则 $f(-x) = t(-x) - \frac{1}{2}(-x)^3 = -tx + \frac{1}{2}x^3$, $\because$ 函数 $f(x)$ 是定义在 $[-2, 2]$ 上的奇函数, 即 $f(-x) = -f(x)$, $\therefore -f(x) = -tx + \frac{1}{2}x^3$, 即 $f(x) = tx - \frac{1}{2}x^3$, 又可知 $f(0) = 0$, $\therefore$ 函数 $f(x)$ 的解析式为 $f(x) = tx - \frac{1}{2}x^3$, $x \in [-2, 2]$;

(2) $f(x) = x(t - \frac{1}{2}x^2)$, $\because t \in [2, 6]$, $x \in [-2, 0]$, $\therefore t - \frac{1}{2}x^2 \geq 0$,

$\because [f(x)]^2 = x^2(t - \frac{1}{2}x^2)^2 \leq \left(\frac{x^2 + t - \frac{1}{2}x^2 + t - \frac{1}{2}x^2}{3}\right)^3 = \frac{8t^3}{27}$, $\therefore x^2 = t - \frac{1}{2}x^2$,

即 $x^2 = \frac{2t}{3}$, $x = -\frac{\sqrt{6t}}{3}$ ($-\frac{\sqrt{6t}}{3} \in [-2, 0]$) 时, $f_{\min} = -\frac{2\sqrt{6}}{9}t\sqrt{t}$ 。

$$f(x_1) - f(x_2) = (x_1 - x_2) \left[t - \frac{1}{2}(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) \right] < 0,$$

$\therefore f(x)$ 在 $[-2, 2]$ 上单调递增, 即 $f(x) \in [f(-2), f(2)]$, 即 $f(x) \in [4 - 2t, 2t - 4]$, $t \geq 9$,

$$\therefore 4 - 2t \leq -14, 2t - 4 \geq 14,$$

$\therefore 14 \in [4 - 2t, 2t - 4]$, $\therefore$ 当 $t \geq 9$ 时, 函数 $y = f(x)$ 的图象上至少有一个点落在直线 $y = 14$ 上。

11. 记函数 $f(x) = \sqrt{2 - \frac{x+7}{x+2}}$ 的定义域为 A , $g(x) = \lg[(2x-b)(ax+1)]$ ($b > 0, a \in R$) 的定义域为 B ,

(1) 求 A ;

(2) 若 $A \subseteq B$, 求 a, b 的取值范围

解 (1) $A = \left\{ x \mid 2 - \frac{x+7}{x+2} \geq 0 \right\} = \left\{ x \mid \frac{x-3}{x+2} \geq 0 \right\} = (-\infty, -2) \cup [3, +\infty),$

(2) $(2x-b)(ax+1) > 0$, 由 $A \subseteq B$, 得 $a > 0$, 则 $x > \frac{b}{2}$ or $x < -\frac{1}{a}$, 即

$$B = \left(-\infty, -\frac{1}{a} \right) \cup \left(\frac{b}{2}, +\infty \right), \quad \begin{cases} 0 < \frac{b}{2} < 3 \\ -2 \leq -\frac{1}{a} < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \geq \frac{1}{2} \\ 0 < b < 6 \end{cases}.$$

12. 设 $f(x) = \frac{a^x + 1}{1 - a^x}$ ($a > 0, a \neq 1$).

(1) 求 $f(x)$ 的反函数 $f^{-1}(x)$;

(2) 讨论 $f^{-1}(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上的单调性, 并加以证明;

(3) 令 $g(x) = 1 + \log_a x$, 当 $[m, n] \subset (1, +\infty)$ ($m < n$) 时, $f^{-1}(x)$ 在 $[m, n]$ 上的值域是 $[g(n), g(m)]$, 求 a 的取值范围。

解 (1) $f^{-1}(x) = \log_a \frac{x-1}{x+1} \quad (x > 1 \text{ 或 } x < -1)$

(2) 设 $1 < x_1 < x_2$, $\therefore \frac{x_1-1}{x_1+1} - \frac{x_2-1}{x_2+1} = \frac{2(x_1-x_2)}{(x_1+1)(x_2+1)} < 0$

$\therefore 0 < a < 1$ 时, $f^{-1}(x_1) > f^{-1}(x_2)$, $\therefore f^{-1}(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上是减函数; $a > 1$ 时, $f^{-1}(x_1) < f^{-1}(x_2)$, $\therefore f^{-1}(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上是增函数。

可知方程的两个根均大于1, 即
$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ f(1) > 0 \Rightarrow 0 < a < 3 - 2\sqrt{2}, \text{ 当 } a > 1 \text{ 时, } \therefore f^{-1}(x) \text{ 在} \\ \frac{1-a}{2a} > 1 \end{cases}$$

$(1, +\infty)$ 上是增函数, $\therefore \begin{cases} f^{-1}(m) = g(n) \\ f^{-1}(n) = g(m) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m-1 = amn + an \\ n-1 = amn + am \end{cases} \Rightarrow a = -1 \text{ (舍去)}. \quad \text{综}$

上, 得 $0 < a < 3 - 2\sqrt{2}$.

13. 集合 A 是由具备下列性质的函数 $f(x)$ 组成的:

- (1) 函数 $f(x)$ 的定义域是 $[0, +\infty)$;
- (2) 函数 $f(x)$ 的值域是 $[-2, 4)$;
- (3) 函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上是增函数. 试分别探究下列两小题:

(I) 判断函数 $f_1(x) = \sqrt{x} - 2 (x \geq 0)$, 及 $f_2(x) = 4 - 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x (x \geq 0)$ 是否属于集合 A? 并简要说明理由.

(II) 对于 (I) 中你认为属于集合 A 的函数 $f(x)$, 不等式 $f(x) + f(x+2) < 2f(x+1)$, 是否对于任意的 $x \geq 0$ 总成立? 若不成立, 为什么? 若成立, 请证明你的结论.

解: (1) 函数 $f_1(x) = \sqrt{x} - 2$ 不属于集合 A. 因为 $f_1(x)$ 的值域是 $[-2, +\infty)$, 所以函数 $f_1(x) = \sqrt{x} - 2$ 不属于集合 A. (或 $\because$ 当 $x = 49 > 0$ 时, $f_1(49) = 5 > 4$, 不满足条件.)

$f_2(x) = 4 - 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x (x \geq 0)$ 在集合 A 中, 因为: ① 函数 $f_2(x)$ 的定义域是 $[0, +\infty)$; ② 函数 $f_2(x)$ 的值域是 $[-2, 4)$; ③ 函数 $f_2(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上是增函数.

$$(2) f(x) + f(x+2) - 2f(x+1) = 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(-\frac{1}{4}\right) < 0,$$

$\therefore$ 不等式 $f(x) + f(x+2) < 2f(x+1)$ 对于任意的 $x \geq 0$ 总成立

14. 设函数 $f(x) = ax^2 + bx + 1$ (a, b 为实数), $F(x) = \begin{cases} f(x) & (x > 0) \\ -f(x) & (x < 0) \end{cases}$

(1) 若 $f(-1) = 0$ 且对任意实数 x 均有 $f(x) \geq 0$ 成立, 求 $F(x)$ 表达式.

(2) 在 (1) 的条件下, 当 $x \in [-2, 2]$ 时, $g(x) = f(x) - kx$ 是单调函数, 求实数 k 的取值范围.

(3) (理) 设 $m > 0, n < 0$ 且 $m+n > 0, a > 0$ 且 $f(x)$ 为偶函数, 求证: $F(m) + F(n) > 0$.

解 (1) $\because f(-1) = 0 \therefore b = a + 1$ 由 $f(x) \geq 0$ 恒成立 知 $\Delta = b^2 - 4a = (a+1)^2 - 4a = (a-1)^2 \leq 0$

$$\therefore a = 1 \text{ 从而 } f(x) = x^2 + 2x + 1 \quad \therefore F(x) = \begin{cases} (x+1) & (x > 0) \\ -(x+1)^2 & (x < 0) \end{cases},$$

(2) 由 (1) 可知 $f(x) = x^2 + 2x + 1 \therefore g(x) = f(x) - kx = x^2 + (2-k)x + 1$, 由于 $g(x)$ 在 $[-2, 2]$ 上是单调函数, 知 $-\frac{2-k}{2} \leq -2$ 或 $-\frac{2-k}{2} \geq 2$, 得 $k \leq -2$ 或 $k \geq 6$,

$\therefore F(x)$ 是奇函数且 $F(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上为增函数,

$\because m > 0, n < 0$, 由 $m > -n > 0$ 知 $F(m) > F(-n) \therefore F(m) > -F(n)$

$\therefore F(m) + F(n) > 0$.

15. 函数 $f(x) = \frac{x}{ax+b}$ (a, b 是非零实常数), 满足 $f(2)=1$, 且方程 $f(x)=x$ 有且仅有一个解。

(1) 求 a, b 的值;

(2) 是否存在实常数 m , 使得对定义域中任意的 x , $f(x)+f(m-x)=4$ 恒成立? 为什么?

(3) 在直角坐标系中, 求定点 $A(-3,1)$ 到此函数图象上任意一点 P 的距离 $|AP|$ 的最小值。

解 (1) 由 $f(2)=1$ 得 $2a+b=2$, 又 $x=0$ 一定是方程 $\frac{x}{ax+b}=x$ 的解,

所以 $\frac{1}{ax+b}=1$ 无解或有解为 0, 若无解, 则 $ax+b=1$ 无解, 得 $a=0$, 矛盾, 若有解为 0, 则

$b=1$, 所以 $a=\frac{1}{2}$ 。

(2) $f(x) = \frac{2x}{x+2}$, 设存在常数 m , 使得对定义域中任意的 x , $f(x)+f(m-x)=4$ 恒成立,

取 $x=0$, 则 $f(0)+f(m-0)=4$, 即 $\frac{2m}{m+2}=4$, $m=-4$ (必要性), 又 $m=-4$ 时,

$f(x)+f(-4-x) = \frac{2x}{x+2} + \frac{2(-4-x)}{-4-x+2} = \dots = 4$ 成立(充分性), 所以存在常数 $m=-4$, 使得对定义域中任意的 x , $f(x)+f(m-x)=4$ 恒成立,

(3) $|AP|^2 = (x+3)^2 + (\frac{x-2}{x+2})^2$, 设 $x+2=t$, $t \neq 0$, 则

$|AP|^2 = (t+1)^2 + (\frac{t-4}{t})^2 = t^2 + 2t + 2 - \frac{8}{t} + \frac{16}{t^2} = (t^2 + \frac{16}{t^2}) + 2(t - \frac{4}{t}) + 2 = (t - \frac{4}{t})^2 + 2(t - \frac{4}{t}) + 10 = (t - \frac{4}{t} + 1)^2 + 9$,

所以当 $t - \frac{4}{t} + 1 = 0$ 时即 $t = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$, 也就是 $x = \frac{-5 \pm \sqrt{17}}{2}$ 时, $|AP|_{\min} = 3$ 。

16. 已知函数 $f(x) = \frac{2}{x} - \log_2 \frac{1+mx}{1-x}$ 是奇函数。

(1) 求 m 的值;

(2) 请讨论它的单调性, 并给予证明。

解 (1) $\because f(x)$ 是奇函数, $\therefore f(-x) + f(x) = 0$;

即 $(-\frac{2}{x} - \log_2 \frac{1-mx}{1+x}) + (\frac{2}{x} - \log_2 \frac{1+mx}{1-x}) = 0$, 解得: $m=1$, 其中 $m=-1$ (舍);

经验证当 $m=1$ 时, $f(x) = \frac{2}{x} - \log_2 \frac{1+x}{1-x}$ ($x \in (-1,0) \cup (0,1)$) 确是奇函数。

(2) 先研究 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内的单调性, 任取 $x_1, x_2 \in (0,1)$, 且设 $x_1 < x_2$, 则

$$\begin{aligned}f(x_1) - f(x_2) &= \frac{2}{x_1} - \log_2 \frac{1+x_1}{1-x_1} - \frac{2}{x_2} + \log_2 \frac{1+x_2}{1-x_2} \\&= \left(\frac{2}{x_1} - \frac{2}{x_2}\right) + \left[\log_2 \left(\frac{2}{1-x_2} - 1\right) - \log_2 \left(\frac{2}{1-x_1} - 1\right)\right],\end{aligned}$$

$$\text{由 } \frac{2}{x_1} - \frac{2}{x_2} > 0, \log_2 \left(\frac{2}{1-x_2} - 1\right) - \log_2 \left(\frac{2}{1-x_1} - 1\right) > 0,$$

得 $f(x_1) - f(x_2) > 0$, 即 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内单调递减;

由于 $f(x)$ 是奇函数, 其图象关于原点对称, 所以函数 $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 内单调递减。